Mecánica Estadística

Evaluación continua. Segundo control

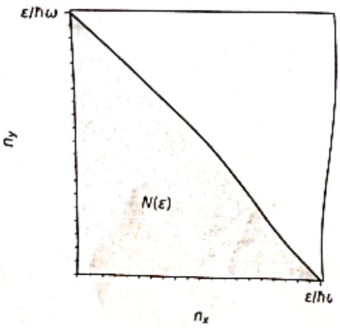
25/04/2024

Problemas

Nota: Debe elegirse uno de los dos ejercicios propuestos a continuación.

1. *Condensación de Bose-Einstein en un potencial armónico bidimensional.* La condensación de Bose-Einstein de un sistema diluido de átomos de masa m se consigue confinándolos en una trampa magnética, que da lugar a un potencial armónico. Cuando la frecuencia de la trampa en una dirección es mucho mayor que en las otras dos, el sistema puede ser tratado como bidimensional. En este caso, el Hamiltoniano del sistema es $H = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$, donde ω representa la frecuencia de oscilación del potencial armónico, tanto en la dirección x como en la y. Considerando que las partículas son bosones de spin 0:

   a) Demuéstrese que la densidad de estados del sistema es $g(\varepsilon) = \varepsilon/(\hbar^2\omega^2)$.

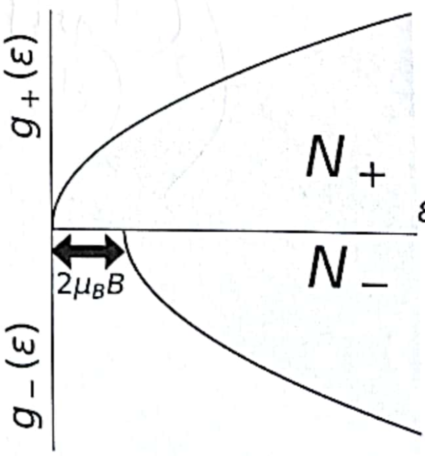
   b) Repítase el cálculo anterior en la aproximación clásica y compárese con el resultado anterior.

   c) Compruébese que el sistema experimenta condensación de Bose-Einstein y calcúlese su temperatura de transición.

   d) Calcúlese la fracción de bosones en el condensado a $T \leq T_B$ y la energía interna del sistema a $T \leq T_B$.

2. *Paramagnetismo de Pauli.* Los electrones de conducción de un metal se comportan como un gas de Fermi no relativista, con una degeneración asociada al *spin.* Cuando se aplica un campo magnético externo, se rompe dicha degeneración apareciendo una diferencia entre los dos estados de $\Delta\varepsilon = 2\mu_B B$. Este efecto se conoce como paramagnetismo de Pauli. Una forma sencilla de tratar este problema es dividir el gas de electrones en dos gases de Fermi independientes (uno para cada orientación del *spin*) con la misma energía de Fermi (ε_F), pero con densidad de estados diferente. De esta forma la densidad de estados de las partículas con spin + será $g_+(\varepsilon) = g_{3D}(\varepsilon)$ y la de las partículas con spin − será $g_-(\varepsilon) = g_{3D}(\varepsilon - 2\mu_B B)$, donde $g_{3D}(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}$ (considérese que $g_{3D}(\varepsilon) = 0$ para $\varepsilon < 0$). Teniendo en cuenta que $\varepsilon_F \gg 2\mu_B B$, calcúlese:

   a) El número de partículas con *spin* + y con *spin* − (N_+ y N_-) a temperatura $T = 0$ K.

   b) La magnetización del sistema ($M = g\mu_B(N_+ - N_-)$) a temperatura $T = 0$ K. Exprésese el resultado en función de la densidad de estados de la energía de Fermi $g_{3D}(\varepsilon_F)$.

   c) La energía interna del sistema a temperatura $T = 0$ K. Demuéstrese que es posible escribir la magnetización del sistema como $M = (E - E_0)g\mu_B/\varepsilon_F$, donde E_0 es la energía interna del sistema en ausencia de campo magnético.

   d) Suponiendo que la igualdad anterior se mantiene a temperatura finita, calcúlese la energía y la magnetización del sistema a temperatura $T \ll T_F$.

Relaciones matemáticas de posible utilidad:

Aproximaciones

$$\ln N! \approx N\ln N - N; \text{ para } N \to \infty$$

$$\ln(1+\alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(\alpha x)^n$$

$$\ln(1-\alpha x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n}; \text{ para } 0 < x < 1$$

$$\ln(1\pm x) \approx \pm x; \text{ para } |x| \ll 1$$

Función Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\, dx;$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n(n!)}\sqrt{\pi}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Función ζ de Riemann

$$g_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

$$g_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \equiv \zeta(k)$$

$$\frac{dg_k(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} g_{k-1}(\lambda)$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1{,}46$$

$$\zeta(1) \to \infty$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2{,}61$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) \approx 1{,}20$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$f_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} \; ; \; I_{n+2} = \frac{n+1}{2\alpha} I_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt = \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1)\zeta(n+1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = (1-2^{-n})\Gamma(n+1)\zeta(n+1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{a^{-n/2-1/2}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Varios

Volumen de una hiperesfera de radio r en D dimensiones:

$$V_D = \frac{r^D \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)}$$

Función de Langevin

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

Constantes físicas de interés

$$\begin{aligned}
k_B &= 1,38\ 10^{-23}\ \text{J/mol K} && \text{Cte. Boltzmann}\\
h &= 6,63\ 10^{-34}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1} && \text{Cte. Planck}\\
m_e &= 9,1\ 10^{-31}\ \text{kg} && \text{masa del electrón}\\
m_n &= 1,6749\ 10^{-27}\ \text{kg} && \text{masa del neutrón}\\
m_p &= 1,6726\ 10^{-27}\ \text{kg} && \text{masa del protón}\\
e &= 1,6\ 10^{-19}\ \text{C} && \text{carga del electrón}\\
c &= 3\ 10^{8}\ \text{m s}^{-1} && \text{velocidad de la luz}\\
\mu_N &= 5,05\ 10^{-27}\ \text{J T}^{-1} && \text{magnetón nuclear}\\
\mu_B &= 9,27\ 10^{-24}\ \text{J T}^{-1} && \text{magnetón de Bohr}
\end{aligned}$$